

## 股指套利系列专题之模型分析篇

东海期货 | 东海专题 2019 年 11 月 15 日

研究所 宏观策略组

贾利军

从业资格证号: F0256916

投资分析证号: Z0000671

联系电话: 021-68757181

邮箱: jialj@qh168.com.cn

陈炳宜 联系人

联系电话: 021-68757223

### 核心观点

1、股指套利有很多种方法,如基本面套利,事件驱动套利,期现套利,合约与合约之间的跨期套利,以及跨品种套利等等,但万变不离其宗,套利的本质其实就是对标的资产的相关因素进行一定的预判,然后基于这种判断采取相应的套利策略。比如结合宏观因素以及当前货币政策分析,认为未来沪深 300 升水幅度将会上升,可以选择做多价差套利;或者是从数学预测模型中发现价差处于历史高位,则可以开仓做空套利。套利的根本就是来自于对投资标的的相关因素判断,基于不同的逻辑维度产生了不同套利策略。

2、本文从模型套利的角度入手对不同时间序列模型做了比较,然后从模型的角度发现套利机会。由于同一种模型涉及到的参数可能不太一样,比如在使用 ARMA 模型时,ACF 和 PACF 所揭示的模型阶数应该是(1, 1),但是根据信息准则结果来看应该是(1, 0)或(4, 0),为了更好的分析模型孰优孰劣,本文将三种模型都在做了分析,并且根据预测结果的精度选出了最为适合的模型。从沪深 300 指数月度涨跌度的预测结果来看,最优模型虽然是 AR(4),但背后存在较为明显的缺陷就是测试集时间长度中的数据过于平稳,导致预测结果为常数的模型表现异常优越。如果把测试集的区间放在市场波动较大的年份中,则此类模型预测的结果将会大打折扣,取而代之的是能捕捉市场波动且较为灵活的模型,如 Seasonal-ARIMA 或者 ARIMA-GARCH 等。

3、作为套利模型的第一篇,本文主要是对时间序列模型拟合、分析以及优化做一个系统梳理。从历史数据中不难发现,合约价差、跨品种价差等具有明显的时间序列特征,因此可以运用时间序列模型进行相应预测,进而从中挖掘出做多/空价差的套利机会。不同的时间序列所展示的特征并不相同,比如存在长期记忆过程、波动率符合某种特殊的 GARCH 过程等,因此在接下来的文章中将重点从三个方面进行深度分析,分别是季节性以及 ARFIMA 模型中参数进行估计,然后结合残差波动率本身特性寻找最优 GARCH 模型。

## 正文：

股指套利有很多种方法，比如基本面套利，事件驱动套利，期现套利，不同和合约之间的套利，以及跨品种套利等等，但万变不离其宗，套利的本质其实就是对标的资产的相关因素进行一定的预判，然后基于这种判断采取相应的投资策略。比如结合宏观因素以及当前货币政策分析，认为未来沪深 300 期货价格大概率会出现升水，可以选择做多价差；或者是从数学预测模型中发现价差处于历史高位，可以开仓做空。因此套利的根本就是来自于对投资标的的相关因素的判断，而基于不同的维度则产生了不同套利策略。

本文作为套利模型的第一篇主要是对如何使用时间序列模型拟合、分析以及优化做一个系统梳理，在此基础上可以对一组时间序列进行分析和预测。从历史数据中不难发现，合约价差、跨品种价差等具有明显的时间序列特征，因此可以运用时间序列模型进行预测，进而从统计概率上给出做多或者做空价差的套利机会。由于不同的时间序列所展示的特征并不相同比如存在长期记忆过程、波动率符合某种特殊的 GARCH 过程等，因此在接下来的文章中重点从三个方面进行深度分析，首先是季节性以及 ARFIMA 模型中参数进行估计，然后结合残差波动率本身特性寻找最优 GARCH 模型。从结构上文章可以分为两大部分，第一部分是简单介绍时间序列模型、参数估计以及相关统计检验；第二部分将沪深 300 指数为例进行具体估计和分析，并在模型精度的比较上给出最优模型。

### 单位根检验

在模型使用前通常需要分析数据的平稳性，如果一个非平稳序列  $Y$  在  $d$  次差分后成为平稳序列，则其称为  $d$  阶单整，记为  $I(d)$ ，也就是说，如果  $d$  阶后序列是平稳的，则认为该序列存在  $d$  个单位根。对于序列进行单位根的检验，即检验序列的特征方程是否存在单位根，如果存在单位根，则认为序列是非平稳的；反之则是平稳的。时间序列可以通过三种回归来描述，分别是没有常数、没有趋势，有趋势等，因此 DF 检验就是对变量系数  $\rho$  的判定。原假设检验为系数等于 1，备择检验是系数绝对值小于 1，而检验的统计量就是通常  $t$  统计量。如果发现误差项序列相关，就需要 ADF 检验，也就是把 DF 回归扩展到滞后的差分项。

### 一般线性模型假设及特征

假定  $\{w_t\}$  是均值为 0 的白噪声序列（假定其方差为  $\sigma_2$ ）那么该序列可以通过下面的线性滤波变换序列  $\{X_t\} = \mu + \sum_{j=0}^{\infty} \varphi_j w_{t-j} = \mu + (1 + \varphi_1 B + \varphi_2 B + \dots) w_t = \mu + \varphi(B) w_t$  式中  $\varphi_0 = 1$ ，而算子  $\varphi(B) \equiv 1 + \varphi_1 B + \varphi_2 B + \dots$  为  $\{w_t\}$  变换到  $\{X_t\}$  的算子，这里的序列  $\{X_t\}$  是后面会介绍的无穷阶移动平均过程。

只有在系数满足  $\sum_{j=0}^{\infty} |\varphi_j| < \infty$  时，序列  $\{X_t\}$  才是平稳的，并且以  $\mu$  为均值。由于均值不会改变协方差的性质，往往假定其为 0，这是一般线性模型为  $\{X_t\} = \varphi(B) w_t$ 。在满足  $\sum_{j=0}^{\infty} |\varphi_j| < \infty$ （这时序列为绝对可加的（absolutely summable））或者满足  $\sum_{j=0}^{\infty} \varphi_j^2 < \infty$ （这时序列为二次可加的（square summable））时，序列称为因果的（causal）。这个因果（causality）值是以前和过去的白噪声项的函数。对于预测来说，只有因果平稳过程才有意义，因此在应用中所提到的平稳都是因果平稳，也就是依历史的平稳，而不是因果（依未来）的平稳。

### MA 模型

模型定义假定  $w_t \sim wn(0, \sigma^2)$ ，如果序列  $\{X_t\}$  满足  $X_t = \mu + \theta_1 w_{t-1} + \dots + \theta_q w_{t-q}$ ，则称其为  $q$  阶 MA 过程，即  $q$  阶移动平均过程。根据  $\{w_t\}$  的白噪声性质，可以到 MA( $q$ ) 过程的各种矩为：

$$\gamma_0 = \sigma^2 * (1 + \theta_1^2 + \dots + \theta_q^2)$$

$$\gamma_j = \begin{cases} \sigma^2 * (1 + \theta_1^2 + \dots + \theta_q^2), & j \leq q \\ 0, & j > q \end{cases}$$

$$\rho_j = \begin{cases} \frac{\theta_j + \sum_{i=1}^{q-j} \theta_i * \theta_{i+j}}{1 + \theta_1^2 + \dots + \theta_q^2}, & j \leq q \\ 0, & j > q \end{cases}$$

所以根据 MA 模型矩为的特质可以看出其相关系数  $\rho_j$ ，在  $j > q$  时为 0，因此可以用自相关函数 (auto-correlation function) 图像来大致判断 MA 过程需要的阶数。

### AR 模型

模型定义假定  $w_t \sim wn(0, \sigma^2)$ ，如果序列  $\{X_t\}$  满足  $X_t = \mu + \phi_1 X_{t-1} + \dots + \phi_p X_{t-p} + w_t$ ，则称其为  $p$  阶 AR 过程，即  $p$  阶自回归过程。另外可以证明 AR 过程平稳接的充分必要条件是特征方程的解不在单位圆上，如果 AR ( $p$ ) 的特征方程的根都在单位圆外，则该过程为因果平稳。和 AR 模型有关的一个概念是偏自相关函数 (partial auto-correlation function, 简称 PACF)，pacf 是基于一系列 AR 模型定义的：

$$X_t - \mu = \phi_{11} * X_{t-1} + w_t$$

$$X_t - \mu = \phi_{21} * X_{t-1} + \phi_{22} * X_{t-2} + w_t$$

$$X_t - \mu = \phi_{21} * X_{t-1} + \phi_{22} * X_{t-2} + \dots + \phi_{pp} * X_{t-p} + w_t$$

这里的系数  $\{\phi_{jj}\}$ ，即每个 AR 模型的最后一个系数，称为偏自相关函数（在正态假设下，偏自相关函数为  $\phi_k = Cov(X_t, X_{t+k} | X_{t+1}, X_{t+2}, \dots, X_{t+k-1})$ ）。对于 AR ( $p$ ) 过程，当  $j > p$  时，偏自相关系数  $\phi_{jj} = 0$ ，因此可以用 pacf 来大致判断 AR 模型阶数。

### ARMA 模型

自回归移动平均过程 ARMA ( $p, q$ ) 定义为  $X_t = \mu + \phi_1 * X_{t-1} + \dots + \phi_p * X_{t-p} + w_t + \theta_1 * w_{t-1} + \dots + \theta_q * w_{t-q}$ ，或者可以用算子表示为  $\phi(B)X_t = \theta(B)w_t$ 。如果让算子  $\varphi(B) = \theta(B)/\phi(B)$ ，则 ARMA 可以写成纯 MA 过程，即  $X_t = \varphi(B) + w_t$ ；如果让算子  $\pi(B) = \phi(B)/\theta(B)$ ，则 ARMA 可以写成纯 AR 过程， $\pi(B)X_t = w_t$ 。平稳 ARMA ( $p, q$ ) 过程的均值为

$$E[X_t] = \frac{\phi_0}{1 - \phi_1 - \dots - \phi_p};$$

$$\gamma_h = E(X_t, X_{t-h}) = \theta_w^2 \left( \frac{\phi_0}{\phi_h} + \frac{\phi_1}{\phi_{h+1}} + \dots \right)$$

可以表明：对于定义为  $\phi(B)X_t = \theta(B)w_t$  的 ARMA 过程  $\{w_t\}$  如果多项式  $\theta(z)$  没有根在单位圆上，则存在多项式  $\phi$  和  $\theta$ ，以及白噪声序列  $\{w_t\}$ ，使得  $\{w_t\}$  满足  $\phi(B)X_t = \theta(B)w_t$ ，而这时一个平稳以及可逆的 ARMA 过程。因此对于一般的 ARMA 过程，总可以转换成平稳和可逆的 ARMA 过程。

### ARIMA

如果序列  $\{X_t\}$  是不平稳的，但通过一阶差分之后便的平稳，则可以用模型 ARIMA ( $p, d, q$ )，即  $\phi(B)(1-B)^d X_t = \theta(B)w_t$ 。如果  $\phi(B)(1-B)^d$  有  $d$  个根在单位圆上，意味着  $\{X_t\}$  是非平稳的，在单位圆上的根叫单位根。如果时间序列  $\{X_t\}$  的  $d$  阶差分是平稳过程，则  $\{X_t\}$  称为  $d$  阶单整的。

### Seasonal-ARIMA

具有非平稳阶数  $p, d, q$ , 季节阶数  $P, D, Q$  以及周期的  $s$  季节 ARIMA 模型记为  $ARIMA(p, d, q) * (P, D, Q)$ , 其差分序列满足具有周期  $s$  的  $ARMA(p, q) * (P, Q)$  模型。

$$\begin{aligned}\phi_p &= 1 - \phi_1 B^1 - \phi_2 B^2 - \dots - \phi_p B^p \\ \Phi_P &= 1 - \Phi_1 B^{1s} - \Phi_2 B^{2s} - \dots - \Phi_P B^{Ps} \\ \theta_q &= 1 + \theta_1 B^1 + \theta_2 B^2 + \dots + \theta_q B^q \\ \Theta_Q &= 1 + \Theta_1 B^{1s} + \Theta_2 B^{2s} + \dots + \Theta_Q B^{Qs}\end{aligned}$$

## ARFIMA

带有均值的自回归分数整合移动平均 (autoregressive fractionally integrated moving average) 模型 (即 ARFIMA 模型), 定义为  $\phi(B)(1-B)^d(X_t - \mu) = \theta(B)w_t$ , 这里的  $d$  叫做记忆参数, 其定义为

$$(1-B)^d = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\Gamma(j-d)B^j}{\Gamma(-d)\Gamma(j+1)}, (\Gamma \text{ 为 GAMMA 函数}).$$

如果  $d$  在 0 和 0.5 之间, 表明序列存在长期记忆过程, 过程的自相关函数图呈现缓慢递减趋势; 当  $d$  为整数时, 该模型为 ARIMA 模型。

## ARFIMA-GARCH

上述模型中的运用都有一个固定的假设, 就是认为误差项是白噪声, 也就是方差为常数的序列。但通过实际金融数据分析发现, 误差项并不是一个常数, 且存在随时间变化而变化的特征。因此可以在原有模型的基础上加上波动率预测模型, ARFIMA-GARCH 模型由此诞生。在 GARCH 模型中有很多衍生模型, 比如 EGARCH、IGARCH、GJR-GARCH 等等, 本文将以标准 GARCH 模型进行实例分析。

## 模型的最大似然估计

先假定  $ARMA(p, q)$  序列的参数  $p, q$  是一致的, 另外假设序列的均值为 0, 否则用减去样本均值的序列来操作。假定白噪声  $\{w_t\}$  为独立同分布的正态分布。令  $X = (X_1, X_2, X_3, \dots)^T$ ,  $\phi = (\phi_1, \phi_2, \phi_3, \dots)^T$ ,  $\theta = (\theta_1, \theta_2, \theta_3, \dots)^T$ , 似然函数为

$$L(\phi, \theta, \sigma^2 | X) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2} |\Gamma|^{1/2}} * \exp\left(-\frac{1}{2} X^T \Gamma_n^{-1} X\right)$$

这里的  $\Gamma_n$  为  $X$  的协方差阵,  $|\Gamma_n|$  是  $\Gamma_n$  的行列式, 它是参数  $\phi, \theta, \sigma^2$  的函数。 $\phi, \theta, \sigma^2$  的最大似然估计是上面的似然函数达到最大值。求最大似然函数说起来容易, 其实并不简单, 由于序列不是独立同分布的, 似然函数不能简单表现为同样密度的乘积, 而是一系列条件分布的乘积。

$$L(\phi, \theta, \sigma^2 | X) = \sum_{t=p+1}^T \ln f(X_t | I_{t-1}; \phi, \theta, \sigma^2) + \ln f(X_p, \dots, X_1; \phi, \theta, \sigma^2)$$

这个完全的对数似然函数称为精确对数似然 (exact log-likelihood), 右边第一项称为条件对数似然 (conditional log-likelihood), 第二项称为边缘对数似然 (marginal log-likelihood)。有两种最大似然估计使得条件对数似然函数最大的参数估计称为条件最大似然估计, 是精确对数似然函数最大的参数估计称为精确最大似然估计。对于平稳过程来说, 两种估计是相合的而且有同样的极限正态分布, 但对于有限样本来说, 如果过程接近非平稳或非可逆, 两种估计很不一样。在正态情况, 最大似然估计的渐近分布于正态情况一样, 但最大似然估计不易计算, 常常需要很好的初始值。

## 数据处理

在正式进行模型分析前需要对数据进一些简单的处理，首先是计算指数月度平均价格，然后计算出对数收益率。为什么分析的对象是收益率而不是指数价格本身，其实在文章模型介绍阶段已经有所说明，在运用时间序列 ARIMA 模型前的重要假设就是认为时间序列是平稳的，如果不平稳就要做一些差分处理。因为股指价格呈现明显的非平稳特征，所以为了方便期间就在直接以收益率为分析对象。数据样本分为两个部分，一部分为训练集另一部分为测试集，滚动长度为 12 个单位也就是一年，所以根据现有数据可以分为三组训练集和测试集，对应时间长度分别为（2003-2015，2016）、（2004-2016，2017）、（2005-2017，2018）。

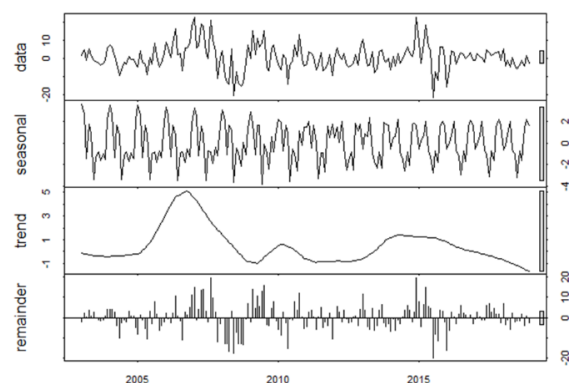
## 单位根检验：

在三个统计检验中，ADF 和 PP 检验结果 p-value 为 0.01，而 KPSS 检验结果为 0.1，也就是说在 95% 置信水平上 ADF 和 PP 认为数据是平稳的，而在 90% 置信水平上三个统计检验结果均表示平稳。因此基于平稳的判断可以对数据进行 ARMA 系列模型分析。

## 模型阶数识别：

这里介绍两种识别方法。第一种是根据 ACF 和 PACF 来判断，在模型介绍部分可以知道 MA 自相关函数的 h 值如果大于对应阶数的话则会迅速下滑，而 AR 偏自相关函数的 h 值如果大于对应阶数的话也会出现明显下降的趋势，因此可以根据图像第几根先迅速下滑来判断对应模型需要的阶数。第二种方法是按照 BIC 信息准则来判断，可以通过 R 中 TSA 包中的 ‘armasubseets’ 函数来获得，以下是两种方法结果展示：

图 1、沪深 300 时间序列特征



资料来源：东海期货研究所

图 2、沪深 300 ACF 图像

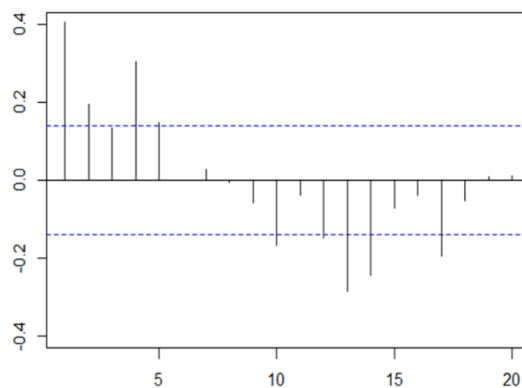
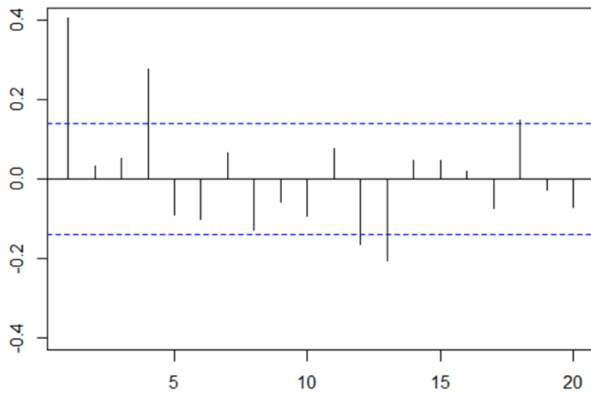


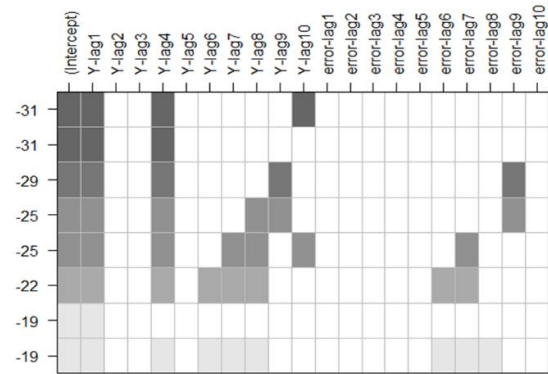
图 3、沪深 300 PACF 图像

图 4、BIC 滞后阶数检测结果





资料来源：东海期货研究所



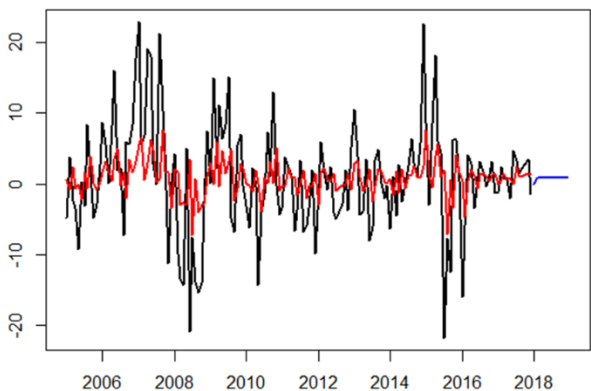
ACF 图中显示在第 3 个 lag 后迅速收敛，PACF 则是在第 1 个 lag 后逐步趋于平稳，由此对应可能的模型分别为 MA(1)、AR(1)。而从 BIC 判断出来的结果来看应该是模型 ARMA(1, 0) 或者 ARMA(4, 0)，产生两个模型的原因就是第一个 lag 和第四个都比较显著。两种方法给出结果截然不同，因此本文将在不同种类模型的基础上分别计算三种阶数对应的时间序列模型，然后再预测精度基础上选择出最优项。

### MA 模型分析及结果

从 MA(1) 拟合出来的结果来看并没有充分拟合出模型走势，尤其在波动较大的年份如 2008 年、2015 年，预测值和实际值出现了较大的偏差。从预测模型的残差项来看，第四个滞后项相关系数接近 0.4%，存在较为明显的相关性，表明残差项的部分因素并没有被模型捕捉到，还需要进一步优化。

图 5、MA(1) 模型拟合及预测结果

图 6、MA 模型残差 ACF



资料来源：东海期货研究所

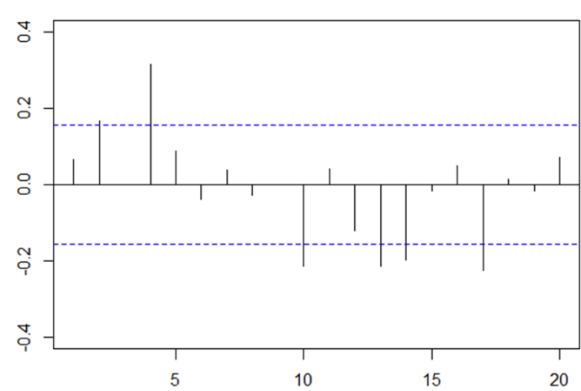


表 1、MA 模型预测精度比较：

模型	年份	ME	RMSE	MAE	MPE	MAPE	MASE
MA(1)	2016	-1.53	5.50	3.53	104.01	104.01	0.40
	2017	0.83	2.11	1.78	73.27	73.98	0.19
	2018	-2.87	4.39	3.86	104.65	117.55	0.42
	均值	-1.19	4.00	3.06	93.97	98.51	0.34

资料来源：东海期货研究所

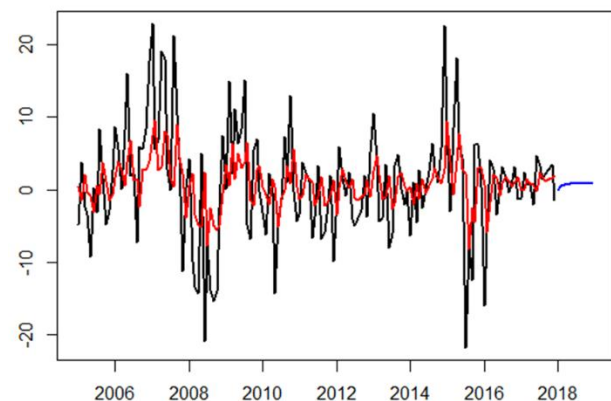
注：ME, Mean Error 平均误差 ( $ME = n^{-1} \sum_{t=1}^n e_t$ )；RMSE, Root Mean Squared Error 均方根误差 ( $MSE = n^{-1} \sum_{t=1}^n e_t^2$ )；MAE, Mean Absolute

Error 平均绝对误差 ( $ME = n^{-1} \sum_{t=1}^n |e_t|$ ); MPE, Mean percentage Error 平均百分比误差 ( $MPE = n^{-1} \sum_{t=1}^n 100 * e_t / y_t$ ); MAPE, Mean Absolute percentage Error 平均绝对百分比误差 ( $MAPE = n^{-1} \sum_{t=1}^n 100 * |e_t / y_t|$ ); MASE, Mean Absolute scaled Error 平均绝对标准化误差 ( $ME = n^{-1} \sum_{t=1}^n |e_t| / q$ )。

### AR 模型分析及结果

相比较 MA(1) 模型, AR(1) 模型原始数据的拟合上有了较为明显的改善, 在主要波动较大的年份中, 模型表现都有了显著提高, 但与实际值之间的差距依然较大。从模型误差项来看, 与 MA 反映的问题较为相似, 第四个滞后项的相关系数较高, 表明残差项的部分因素并没有被模型捕捉到, 还需要进一步优化。

图 7、MA(1) 模型拟合及预测结果



资料来源: 东海期货研究所

图 8、MA 模型残差 ACF

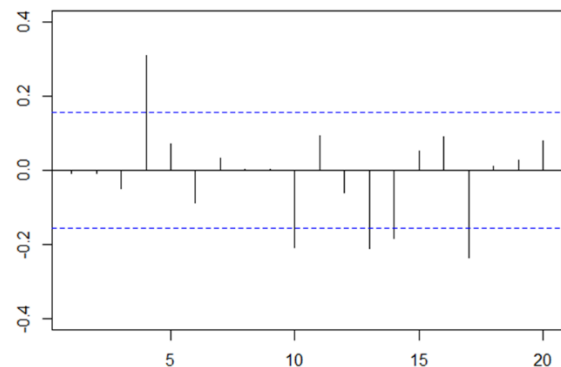


表 2、AR 模型预测精度比较:

模型	年份	ME	RMSE	MAE	MPE	MAPE	MASE
AR(1)	2016	-1.54	5.55	3.54	104.15	104.15	0.40
	2017	0.86	2.13	1.82	77.01	77.01	0.20
	2018	-2.82	4.33	3.80	103.03	114.73	0.42
	均值	-1.17	4.00	3.05	94.73	98.63	0.34

资料来源: 东海期货研究所

### ARMA 模型分析及结果

从三种不同阶数拟合出模型来看, ARMA(1, 0) 和 ARMA(1, 1) 模型与此前 MA(1) 和 AR(1) 反映的问题较为类似, 模型总体拟合出了历史指数回报走势, 但是在波动幅度上的表现并不是很理想, 而且模型残差出现较为明显的自相关性。但相比较而言模型 ARMA(4, 0) 也就是 AR(4) 更好的拟合出市场剧烈震荡下的走势, 波动幅度较前两个模型有明显改善, 而且残差自相关图像上表现也较为理想 (没有显著自相关性)。从预测精度上也能有所体现, 除了在 MPSE 种表现略差于另外两个模型外, 在其它水平下均表现最好, 几乎完胜, 因此在 ARMA 系列中 ARMA(4, 0) 为最优模型。

图 9、ARMA(1, 0) 模型拟合及预测结果

图 10、ARMA(1, 0) 模型残差 ACF

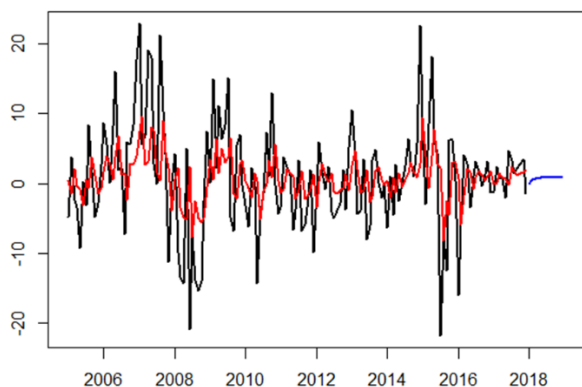


图 11、ARMA(4, 0) 模型拟合及预测结果

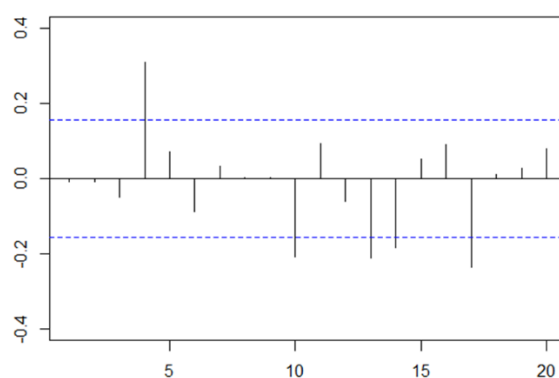


图 12、ARMA(4, 0) 模型残差 ACF

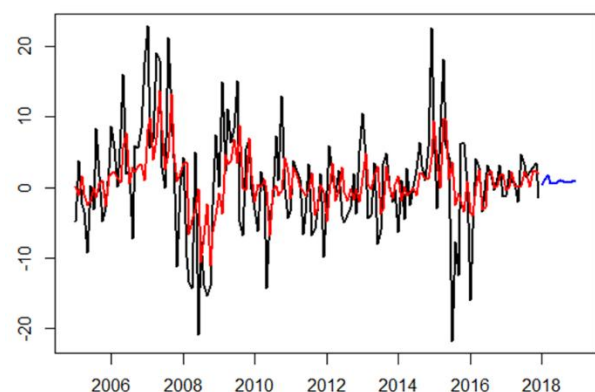


图 13、ARMA(1, 1) 模型拟合及预测结果

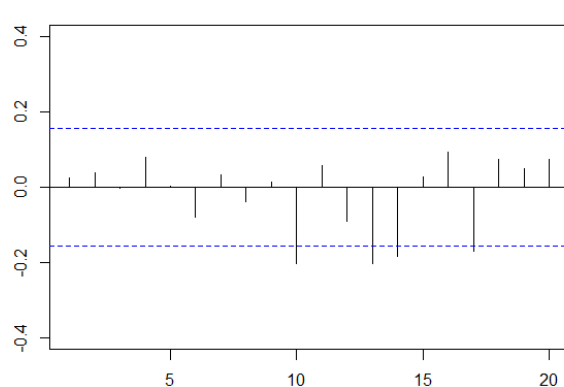
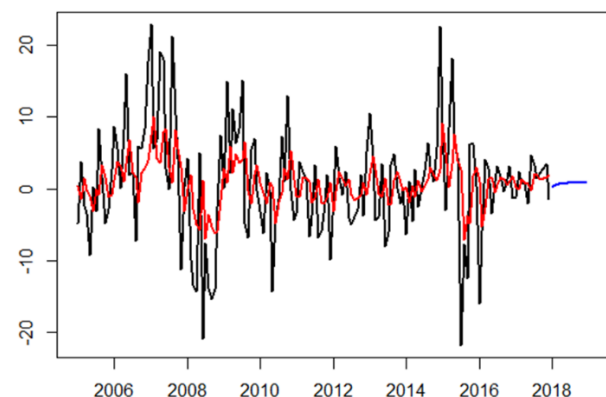


图 14、ARMA(1, 1) 模型残差 ACF



资料来源：东海期货研究所

表 3、ARMA 模型预测精度比较：

模型	年份	ME	RMSE	MAE	MPE	MAPE	MASE
ARMA(1, 0)	2016	-1.54	5.55	3.54	104.15	104.15	0.40
	2017	0.86	2.13	1.82	77.01	77.01	0.20
	2018	-2.82	4.33	3.80	103.03	114.73	0.42
	均值	-1.17	4.00	3.05	94.73	98.63	0.34
ARMA(4, 0)	2016	-1.33	4.60	3.06	97.96	97.96	0.35
	2017	0.87	2.13	1.85	66.75	82.40	0.20
	2018	-2.95	4.39	3.86	114.87	117.14	0.42



	均值	-1.14	3.71	2.92	93.19	99.16	0.32
ARMA (1, 1)	2016	-1.65	5.69	3.58	104.24	104.24	0.41
	2017	0.85	2.13	1.83	78.32	78.32	0.20
	2018	-2.82	4.29	3.76	102.70	113.24	0.41
	均值	-1.21	4.04	3.06	95.09	98.60	0.34

资料来源：东海期货研究所

## ARIMA 模型分析及结果

图 15、ARIMA(1, 1, 0) 模型拟合及预测结果

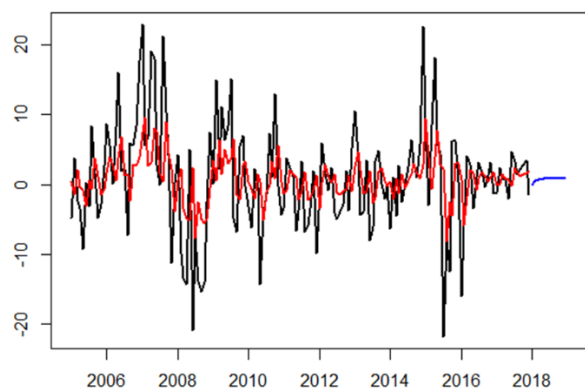


图 17、ARIMA(4, 1, 0) 模型拟合及预测结果

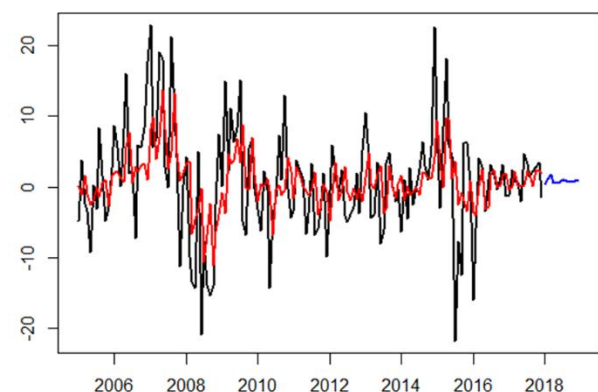
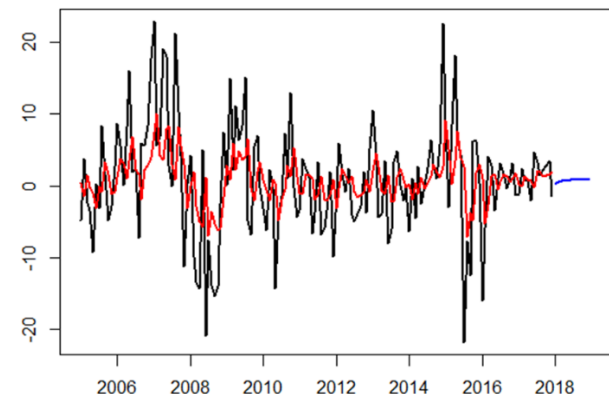


图 19、ARIMA(1, 1, 1) 模型拟合及预测结果



资料来源：东海期货研究所

图 16、ARIMA(1, 1, 0) 模型残差 ACF

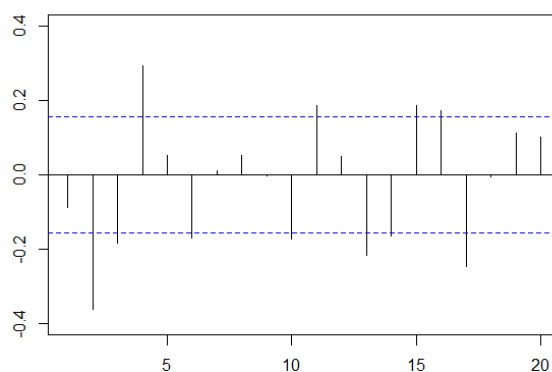


图 18、ARIMA(4, 1, 0) 模型残差 ACF

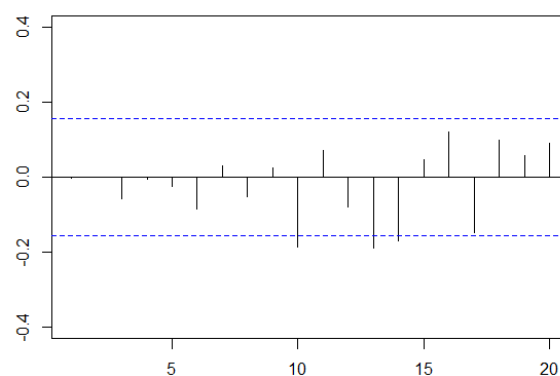


图 20、ARIMA(1, 1, 1) 模型残差 ACF

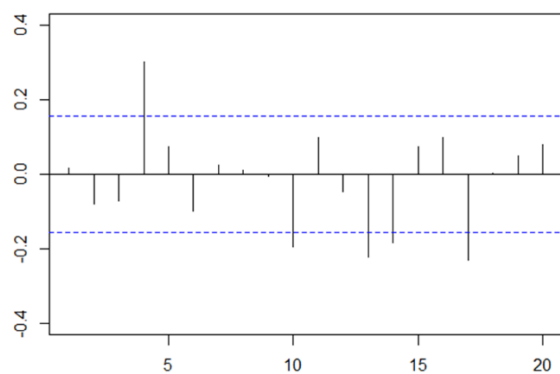


表 4、ARIMA 模型预测精度比较：

模型	年份	ME	RMSE	MAE	MPE	MAPE	MASE
ARIMA (1, 1, 0)	2016	-2.60	6.05	3.62	109.78	128.61	0.41
	2017	1.66	2.65	2.35	109.73	109.73	0.25
	2018	-1.87	3.57	3.12	98.45	98.45	0.34
	均值	-0.93	4.09	3.03	105.99	112.27	0.34
ARIMA (4, 1, 0)	2016	-1.18	4.39	2.95	91.54	91.54	0.34
	2017	1.14	2.27	1.97	73.54	87.66	0.21
	2018	-3.20	4.56	4.01	116.54	125.09	0.44
	均值	-1.08	3.74	2.98	93.87	101.43	0.33
ARIMA (1, 1, 1)	2016	-1.54	5.55	3.54	104.15	104.15	0.40
	2017	0.86	2.13	1.82	77.07	77.07	0.20
	2018	-2.81	4.33	3.79	102.98	114.55	0.42
	均值	-1.16	4.00	3.05	94.74	98.59	0.34

资料来源：东海期货研究所

### Seasonal-ARMA 模型分析及结果

季节性 ARMA 模型在拟合上整体由于 ARMA 模型，在市场变动较大的时期模型都能较好的捕捉市场波动的方向，从模型预测于实际值的比较来看也都很好的拟合出当期股指收益率的走势，模型残差自相关方面也显著不相关。在模型比较方面可以发现一个有趣的现象，虽然在波动幅度捕捉方面 Seasonal-ARMA 比 AR(4) 更为灵活，但是在预测程度方面前者却表现的更差一些。其中的原因主要是因为 AR 模型预测的结果是一条直线，并没季节性方面的冲击和波动，而且在文中选取的测试集范围是 2016-2018，对应指数波动较为平稳，因此导致 AR 模型在精确度上更具优势。

图 21、Seasonal ARMA(1, 0, 0) (1, 1, 1) [12]

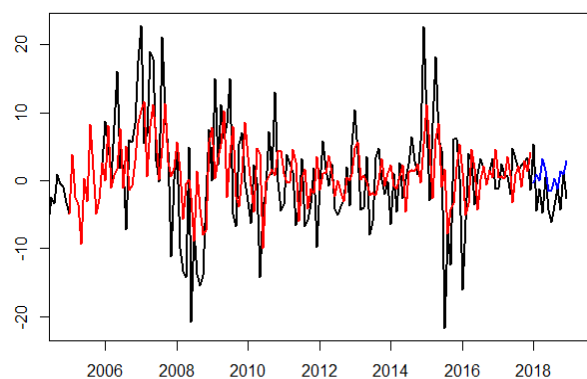


图 23、Seasonal ARMA(4, 0, 0) (1, 1, 1) [12]

图 22、模型残差 ACF

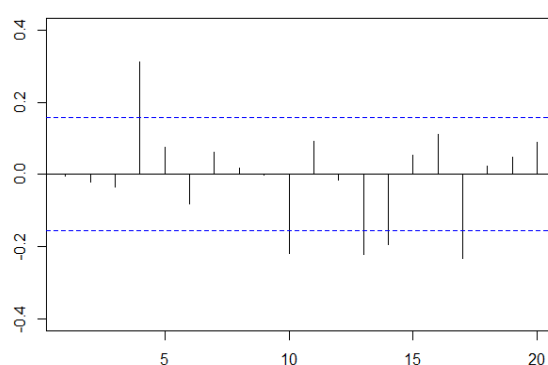


图 24、模型残差 ACF

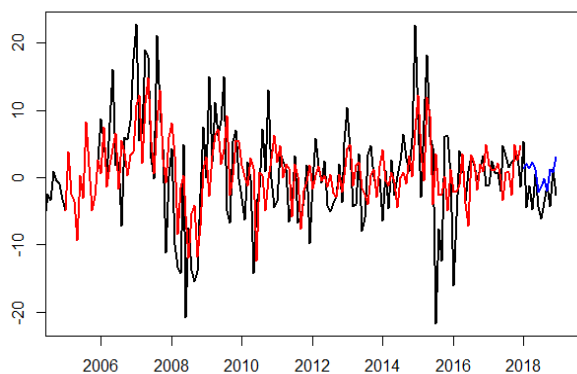


图 25、Seasonal ARMA(1, 0, 1) (1, 1, 1) [12]

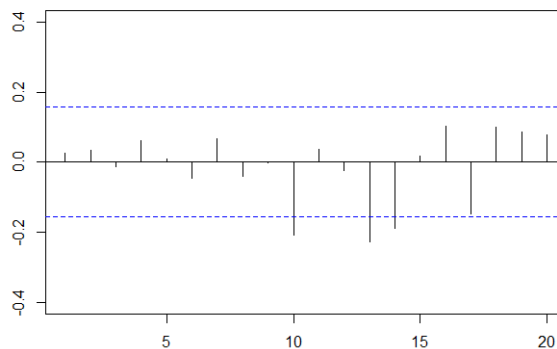
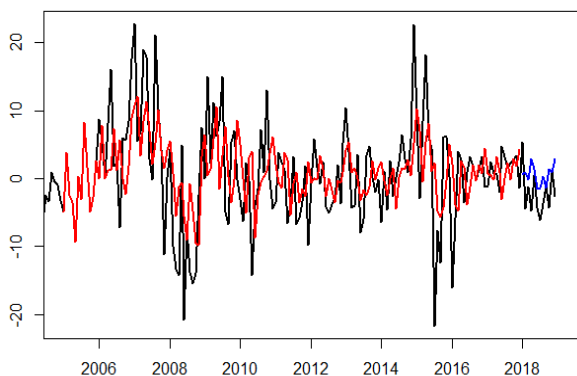


图 26、模型残差 ACF



资料来源：东海期货研究所

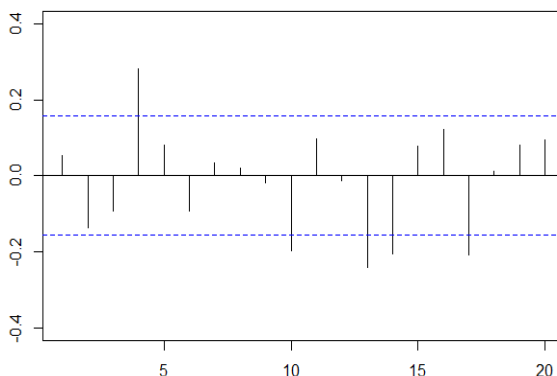


表 5、Seasonal-ARMA 模型预测精度比较：

模型	年份	ME	RMSE	MAE	MPE	MAPE	MASE
Seasonal-ARMA (1, 0, 0) (1, 1, 1)	2016	-1.43	6.60	4.62	129.51	148.44	0.53
	2017	0.94	3.41	2.91	98.43	152.75	0.32
	2018	-2.68	4.43	3.70	73.19	114.06	0.41
	均值	-1.05	4.81	3.74	100.38	138.42	0.42
Seasonal-ARMA (4, 0, 0) (1, 1, 1)	2016	-1.47	5.85	4.14	145.56	145.56	0.47
	2017	0.96	3.59	2.93	106.11	144.00	0.32
	2018	-2.74	4.25	3.66	80.05	121.40	0.40
	均值	-1.08	4.57	3.57	110.57	136.98	0.40
Seasonal-ARMA (1, 0, 1) (1, 1, 1)	2016	-1.55	6.82	4.70	122.25	152.91	0.54
	2017	0.96	3.40	2.90	98.83	152.21	0.32
	2018	-2.66	4.28	3.56	74.31	105.97	0.39
	均值	-1.08	4.83	3.72	98.46	137.03	0.41

资料来源：东海期货研究所

## ARFIMA 模型分析及结果

图 27、ARFIMA(1, 0.5, 0) 模型拟合及预测结果

图 28、ARFIMA(1, 0.5, 0) 模型残差 ACF

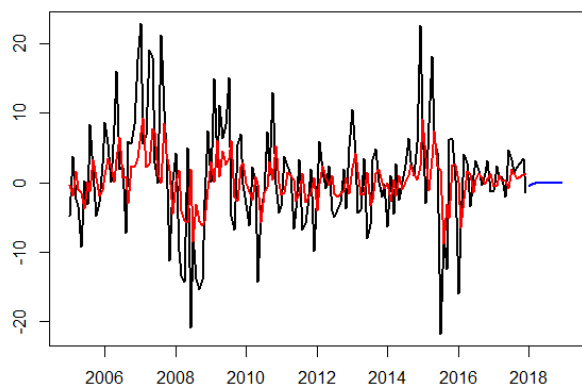


图 29、ARFIMA(4, 0.5, 0) 模型拟合及预测结果

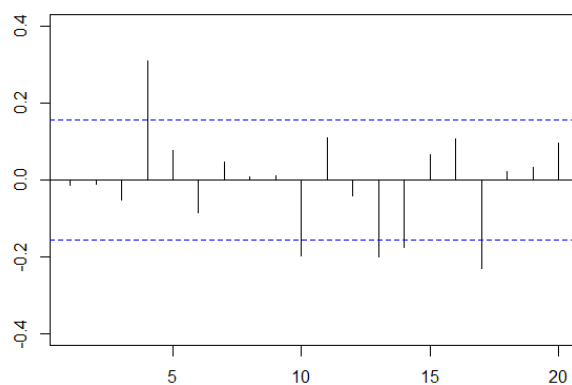


图 30、ARFIMA(4, 0.5, 0) 模型残差 ACF

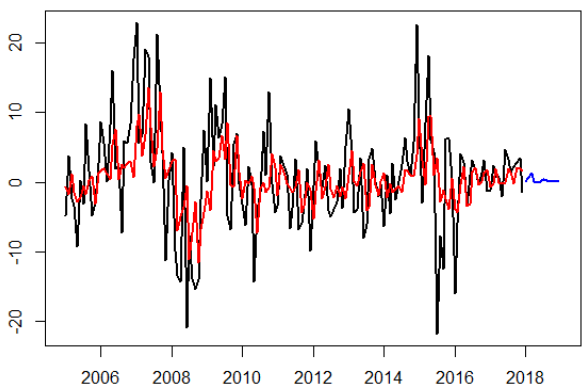


图 31、ARFIMA(1, 0.5, 1) 模型拟合及预测结果

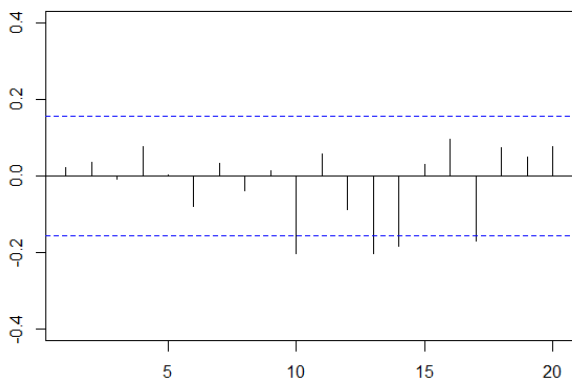
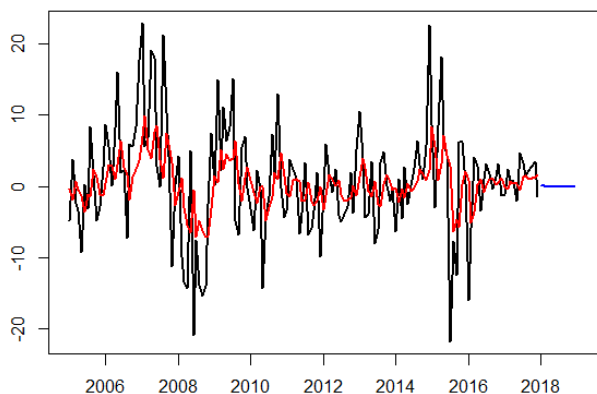


图 32、ARFIMA(1, 0.5, 1) 模型残差 ACF



资料来源：东海期货研究所

表 6、ARFIMA 模型预测精度比较：

模型	年份	ME	RMSE	MAE	MPE	MAPE	MASE
ARFIMA(1, 0.5, 0)	2016	-0.83	5.47	3.70	100.07	100.07	0.42
	2017	1.51	2.48	2.17	98.32	98.32	0.24
	2018	-2.02	3.81	3.31	99.94	99.94	0.36
	均值	-0.44	3.92	3.06	99.44	99.44	0.34
ARFIMA(4, 0.5, 0)	2016	-0.74	4.55	3.19	93.07	93.07	0.36
	2017	1.41	2.43	2.07	82.23	87.78	0.22
	2018	-2.38	3.99	3.54	112.33	112.33	0.39

	均值	-0.57	3.66	2.93	95.88	97.73	0.33
ARFIMA (1, 0.5, 1)	2016	-0.96	5.63	3.74	99.74	99.74	0.43
	2017	1.50	2.49	2.19	99.54	99.54	0.24
	2018	-2.11	3.76	3.29	100.03	100.03	0.36
	均值	-0.53	3.96	3.07	99.77	99.77	0.34

资料来源：东海期货研究所

上述是对不同模型不同阶数做了比较，根据模型预测的精度进行判断。比如在使用 ARMA 模型时，ACF 和 PACF 所揭示的模型阶数应该是 (1, 1)，但是根据信息准则结果来看应该是 (1, 0) 或 (4, 0)，误差滞后项并不是很明显，所以不同的方法所以推荐的模型显然不同，也给预测带来的一些难度。

表 7、所有模型预测精度比较：

模型	年份	ME	RMSE	MAE	MPE	MAPE	MASE
MA (1)	2016	-1.53	5.50	3.53	104.01	104.01	0.40
	2017	0.83	2.11	1.78	73.27	73.98	0.19
	2018	-2.87	4.39	3.86	104.65	117.55	0.42
	均值	-1.19	4.00	3.06	93.97	98.51	0.34
AR (1)	2016	-1.54	5.55	3.54	104.15	104.15	0.40
	2017	0.86	2.13	1.82	77.01	77.01	0.20
	2018	-2.82	4.33	3.80	103.03	114.73	0.42
	均值	-1.17	4.00	3.05	94.73	98.63	0.34
ARMA (4, 0)	2016	-1.33	4.60	3.06	97.96	97.96	0.35
	2017	0.87	2.13	1.85	66.75	82.40	0.20
	2018	-2.95	4.39	3.86	114.87	117.14	0.42
	均值	-1.14	3.71	2.92	93.19	99.16	0.32
ARIMA (4, 1, 0)	2016	-1.18	4.39	2.95	91.54	91.54	0.34
	2017	1.14	2.27	1.97	73.54	87.66	0.21
	2018	-3.20	4.56	4.01	116.54	125.09	0.44
	均值	-1.08	3.74	2.98	93.87	101.43	0.33
Seasonal-ARIMA (4, 0, 0) (1, 1, 1)	2016	-1.47	5.85	4.14	145.56	145.56	0.47
	2017	0.96	3.59	2.93	106.11	144.00	0.32
	2018	-2.74	4.25	3.66	80.05	121.40	0.40
	均值	-1.08	4.57	3.57	110.57	136.98	0.40
ARFIMA (4, 0.5, 0)	2016	-0.74	4.55	3.19	93.07	93.07	0.36
	2017	1.41	2.43	2.07	82.23	87.78	0.22
	2018	-2.38	3.99	3.54	112.33	112.33	0.39
	均值	-0.57	3.66	3.93	95.88	97.73	0.33

资料来源：东海期货研究所

注：ME, Mean Error 平均误差 ( $ME = n^{-1} \sum_{t=1}^n e_t$ )；RMSE, Root Mean Squared Error 均方根误差 ( $MSE = n^{-1} \sum_{t=1}^n e_t^2$ )；MAE, Mean Absolute Error 平均绝对误差 ( $ME = n^{-1} \sum_{t=1}^n |e_t|$ )；MPE, Mean percentage Error 平均百分比误差 ( $MPE = n^{-1} \sum_{t=1}^n 100 * e_t / y_t$ )；MAPE, Mean Absolute percentage Error 平均绝对百分比误差 ( $MPE = n^{-1} \sum_{t=1}^n 100 * |e_t / y_t|$ )；MASE, Mean Absolute scaled Error 平均绝对标准化误差 ( $ME = n^{-1} \sum_{t=1}^n |e_t| / q$ )。



上述模型精度比较结果来看，综合误差最小的模型为  $ARMA(4, 0)$ ，需要说明的是，从最优模型拟合的结果来看，残差项并没有出现明显的自相关性，因此在可以假设残差的方差某个常数，所以  $ARMA-GARCH$  模型在这里并没得到运用，或许是因为差分的因素导致数据所携带的信息发生更改。但在接下来的专题中将深度探讨异方差波动率情况下模型如何进行构建和优化。

### 分析及总结

本文作为套利模型的第一篇主要是对如何使用时间序列模型拟合、分析以及优化做一个系统的梳理，在此基础上可以对一组时间序列进行分析和预测。从历史数据中不难发现，合约价差、跨品种价差等具有明显的时间序列特征，因此可以运用时间序列模型进行预测，进而从统计概率上给出做多或者做空价差的套利机会。由于不同的时间序列所展示的特征并不相同比如存在长期记忆过程、波动率符合某种特殊的  $GARCH$  过程等，因此在接下来的文章中将重点从三个方面进行深度分析，首先是季节性以及  $ARFIMA$  模型中参数进行估计，然后结合残差波动率本身特性寻找最优  $GARCH$  模型。

从沪深 300 指数月度涨跌度的预测结果来看，最优模型虽然是  $AR(4)$ ，背后存在较为明显的缺陷就是测试集时间长度中的数据过于平稳，导致预测结果为常数的模型表现异常优越。但如果把测试集的区间放在市场波动较大的年份中，则此类模型预测的结果将会大打折扣，取而代之的是能捕捉市场幅度较为灵活的模型如  $seasonal-arima$  或者  $arima-garch$  等。

### 免责声明：

本报告立足于结合基本面及技术面对市场价格运行趋势及轮廓进行整体判断，提示可能存在的投资风险与投资机会。报告中的信息均源自于公开材料，我公司对这些信息的准确性和完整性不作任何保证。报告仅作参考之用，在任何情况下均不构成对所述期货品种的买卖建议，我们也不承担因根据本报告操作而导致的损失。

### 联系方式：

公司地址：上海浦东新区东方路 1928 号东海证券大厦 8 层

邮政编码：200125

公司网址：[www.qh168.com.cn](http://www.qh168.com.cn)